Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 7 — Musterlösung

Aufgabe 1: *(3 Punkte)* Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Lösung. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X ist, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, sodass

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad \text{für alle } m, n \geq N.$$

Für $n = N$ bedeutet dies insbesondere, dass

$$x_m \in B(x_N, \varepsilon) \qquad \text{für alle } m \geq N.$$

Setzen wir schließlich zum Beispiel $\varepsilon = 1$ und

$$r = \max\left\{1, \max_{m\leq N} d(x_N, x_m)\right\},$$

dann ist

$$d(x_m, x_N) \leq r \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N},$$

also ist die gesamte Folge in der abgeschlossenen Kugel $B[x_N, r]$ enthalten. ■

Aufgabe 2: *(4+3 Punkte)* Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.

(a) Sei $B \subset X$ abgeschlossen und $A \subset B$. Zeige, dass $\overline{A} \subset B$ gilt.

(b) Folgere aus (a), dass A in keiner *echten* abgeschlossen Teilmenge $B \subset \overline{A}$ enthalten ist.

Lösung. (a): Nach Voraussetzung gilt $A \subset B$ und B ist abgeschlossen. Sei nun $x \in X$ ein Berührungspunkt von A, d.h. es gilt $x \in \overline{A}$. Nach Definition existiert dann eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A mit $x_n \longrightarrow x$ für $n \to \infty$. Wegen $A \subset B$ ist diese Folge insbesondere auch in B enthalten und da B abgeschlossen ist, enthält B alle ihre Berührungspunkte, also $x \in B$. Da $x \in \overline{A}$ beliebig war, folgern wir, dass $\overline{A} \subset B$ gilt.

(b): Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass eine echte abgeschlossene Teilmenge $B \subset \overline{A}$ mit $A \subset B$ existiert. Nach Aufgabenteil (a) folgt aus $A \subset B$ insbesondere $\overline{A} \subset B$ während unsere Annahme $B \subset \overline{A}$ ist. Wir finden also, dass $\overline{A} = B$ gelten muss und das ist ein Widerspruch dazu, dass B eine echte Teilmenge ist. ■